Mapas de Karnaugh

Apunte N° 4

Métodos de Simplificación

Para determinar cuándo una expresión booleana es la más simple de todas las equivalentes a ella, se adopta el criterio de expresión minimizada o función mínima. Este criterio establece que una expresión está minimizada cuando, expresada en productos de sumas o en sumas de productos, tenga el mínimo número de términos y el mínimo número de variables en cada término.

Se denomina minimización de una función al proceso por el que se obtiene una función mínima.

Cabe destacar, en función de la complejidad o número de variables de la función a simplificar, los siguientes métodos de minimización de una función:

- Método algebraico. Consiste en la aplicación analítica de los teoremas y axiomas del álgebra de Boole (principalmente la propiedad distributiva a los términos de la función), con el objetivo de eliminar términos y variables. Tiene el inconveniente de ser poco sistemático, muy subjetivo y por lo tanto no siempre se llega de forma fácil a la expresión minimizada, e incluso a identificarla cuando se obtiene ésta.
- Método de Karnaugh. Es un método gráfico y sistemático, muy eficiente en funciones de hasta seis variables.
- Método de Quine-McCluskey. Es un método sistemático que utiliza un algoritmo de simplificación que posibilita su programación en un ordenador. Se utiliza, preferentemente, en la simplificación de funciones complejas, con más de seis variables.

Método de Karnaugh

Un mapa de Karnaugh proporciona un método sistemático de simplificación de expresiones booleanas y, si se aplica adecuadamente, genera las expresiones suma de productos y producto de sumas más simples posibles, conocidas como expresiones mínimas.

Un mapa de Karnaugh es similar a una tabla de verdad, ya que muestra todos los valores posibles de las variables de entrada y la salida resultante para cada valor. En lugar de organizar en filas y columnas como una tabla de verdad, el mapa de Karnaugh es una matriz de celdas en la que cada celda representa un valor binario de las variables de entrada. Las celdas se organizan de manera que la simplificación de una determinada expresión consiste en agrupar adecuadamente las celdas.

El número de celdas de un mapa de Karnaugh es igual al número total de posibles combinaciones de las variables de entrada, al igual que el número de filas de una tabla de verdad. Para tres variables, el número de celdas necesarias es de $2^3 = 8$.

Para cuatro variables, el número de celdas es de $2^4 = 16$.

Mapas de Karnaugh

\ B A\	0	1
0	$\bar{A}\,\bar{B}$ 0	$\bar{A}\,B$ 1
1	$A\,\bar{B}$ 2	$A\,B$ 3

\ C AB\	0	1
00	$\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$ 0	$\bar{A}\,\bar{B}\,C$ 1
01	$\bar{A}\,B\,\bar{C}$ 2	$\bar{A}\,B\,C$ 3
11	$A\,B\,\bar{C}$ 6	$A\,B\,C$ 7
10	$A\,\bar{B}\,\bar{C}$ 4	$A\,\bar{B}\,C$ 5

\CD AB\	00	01	11	10
00	$\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}$ 0	$\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,D$ 1	$\bar{A}\,\bar{B}\,C\,D$ 3	$\bar{A}\,\bar{B}\,C\,\bar{D}$ 2
01	$\bar{A}\,B\,\bar{C}\,\bar{D}$ 4	$\bar{A}\,B\,\bar{C}\,D$ 5	$\bar{A}\,B\,C\,D$ 7	$\bar{A}\,B\,C\,\bar{D}$ 6
11	$A\,B\,\bar{C}\,\bar{D}$ 12	$A\,B\,\bar{C}\,D$ 13	$A\,B\,C\,D$ 15	$A\,B\,C\,\bar{D}$ 14
10	$A\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}$ 8	$A\,\bar{B}\,\bar{C}\,D$ 9	$A\,\bar{B}\,C\,D$ 11	$A\,\bar{B}\,C\,\bar{D}$ 10

Mapas de Karnaugh

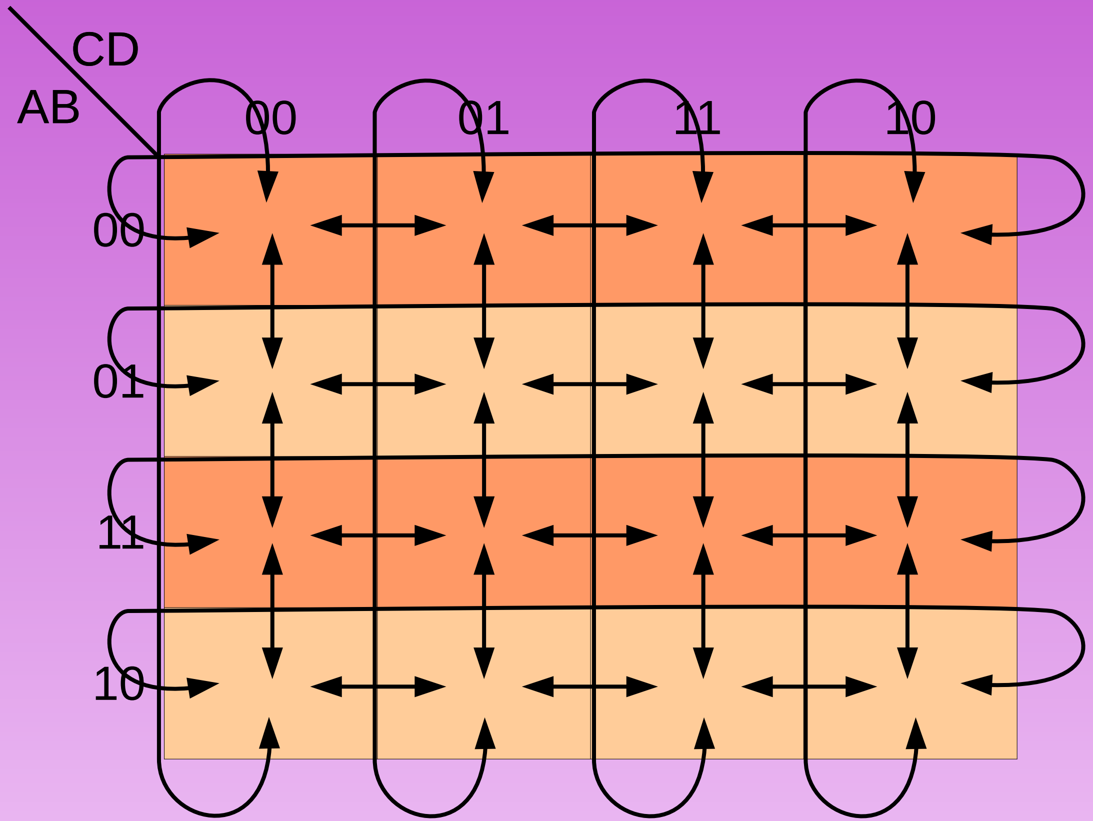
\DE ABC\	00	01	11	10
000	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E}$ 0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,E$ 1	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D\,E$ 3	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D\,\overline{E}$ 2
001	$\overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D}\,\overline{E}$ 4	$\overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D}\,E$ 5	$\overline{A}\,\overline{B}\,C\,D\,E$ 7	$\overline{A}\,\overline{B}\,C\,D\,\overline{E}$ 6
011	$\overline{A}\,B\,C\,\overline{D}\,\overline{E}$ 12	$\overline{A}\,B\,C\,\overline{D}\,E$ 13	$\overline{A}\,B\,C\,D\,E$ 15	$\overline{A}\,B\,C\,D\,\overline{E}$ 14
010	$\overline{A}\,B\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E}$ 8	$\overline{A}\,B\,\overline{C}\,\overline{D}\,E$ 9	$\overline{A}\,B\,\overline{C}\,D\,E$ 11	$\overline{A}\,B\,\overline{C}\,D\,\overline{E}$ 10
110	$A\,B\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E}$ 24	$A\,B\,\overline{C}\,\overline{D}\,E$ 25	$A\,B\,\overline{C}\,D\,E$ 27	$A\,B\,\overline{C}\,D\,\overline{E}$ 26
111	$A\,B\,C\,\overline{D}\,\overline{E}$ 28	$A\,B\,C\,\overline{D}\,E$ 29	$A\,B\,C\,D\,E$ 31	$A\,B\,C\,D\,\overline{E}$ 30
101	$A\,\overline{B}\,C\,\overline{D}\,\overline{E}$ 20	$A\,\overline{B}\,C\,\overline{D}\,E$ 21	$A\,\overline{B}\,C\,D\,E$ 23	$A\,\overline{B}\,C\,D\,\overline{E}$ 22
100	$A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E}$ 16	$A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,E$ 17	$A\,\overline{B}\,\overline{C}\,D\,E$ 19	$A\,\overline{B}\,\overline{C}\,D\,\overline{E}$ 18

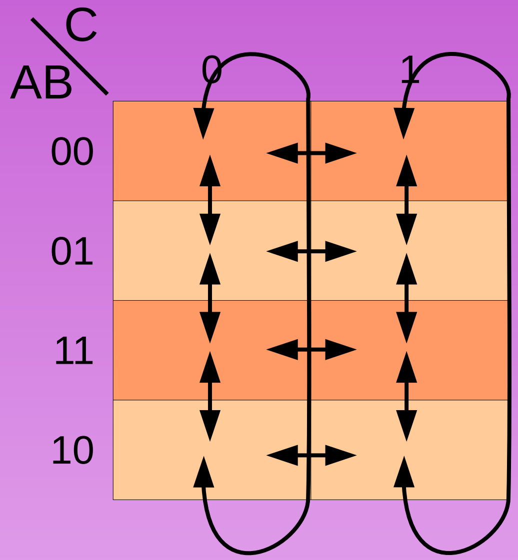
Adyacencia de celdas

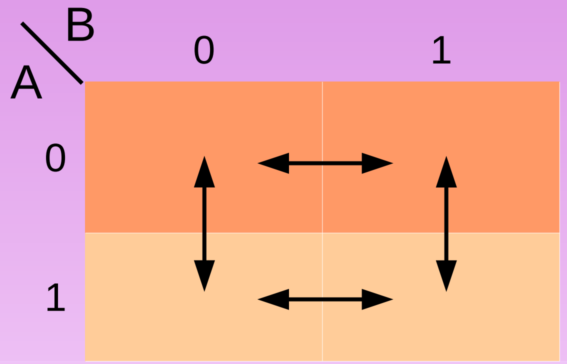
Las celdas de un mapa de Karnaugh se disponen de manera que sólo cambia una única variable entre celdas adyacentes. La adyacencia se define por un cambio de una única variable. Por ejemplo, en el mapa de tres variables, la celda 010 es adyacente a las celdas 000, 011 y 110. La celda 010 no es adyacente a la celda 001, ni a la celda 111, ni a la celda 100 ni a la celda 101.

Físicamente, cada celda es adyacente a las celdas que están situadas inmediatas a ella por cualquiera de sus cuatro lados. Una celda no es adyacente a aquellas celdas que tocan diagonalmente alguna de sus esquinas. Además, las celdas de la fila superior son adyacentes a las de la fila inferior y las celdas de la columna izquierda son adyacentes a las situadas en la columna de la derecha. Esto se denomina adyacencia cíclica, ya que podemos pensar que el mapa de Karnaugh se dobla de forma que se toquen los extremos superior e inferior como si fuera un cilindro o los extremos de la derecha e izquierda para formar la misma figura.

Adyacencia de celdas







Mapa de Karnaugh

Por cada término de la expresión suma de productos, se coloca un 1 en el mapa de Karnaugh en la celda correspondiente al valor del producto. Se coloca un 1 en la celda correspondiente al valor de un término producto.

Por ejemplo, para el término $A\overline{B}C$, se escribiría un 1 en la celda 101 de un mapa de Karnaugh de tres variables.

Cuando una expresión suma de productos se ha reflejado por completo en el mapa de Karnaugh, en dicho mapa habrá tantos 1s como términos producto tenga la suma de productos estándar. Las celdas que no contienen un 1 son aquellas para las que la expresión es igual a 0. Normalmente, cuando se trabaja con una expresión suma de productos, los 0s no se incluyen en el mapa.

\ C AB\	0	1
00	1 $_{0}$	1 $_{1}$
01	$_{2}$	$_{3}$
11	1 $_{6}$	$_{7}$
10	1 $_{4}$	$_{5}$

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,C + A\,B\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,\overline{C}$$

000 001 110 100

Mapa de Karnaugh

Antes de poder utilizar un mapa de Karnaugh, las expresiones booleanas deben estar en su forma canónica. Si una expresión no lo está, se pasará al formato mediante el procedimiento descrito en el Apunte 3 o mediante desarrollo numérico. Dado que, en cualquier caso, las expresiones tienen que evaluarse antes de pasarlas al mapa de Karnaugh, el desarrollo numérico es quizá el método más eficaz.

El desarrollo numérico indica que si, por ejemplo, de un termino con dos variables, de tres que componen el sistema, se agrega numéricamente para completarlo la tercer variable faltante en 1 y en 0. Si tuviera $A\overline{B}$, o sea, 10 y quisiera completar su forma con la tercer variable C, obtendría 101 y 100.

Minimización

El proceso que genera una expresión que contiene el menor número posible de términos con el mínimo número de variables posibles se denomina minimización. Después de haber obtenido el mapa de Karnaugh de una suma de productos, la expresión suma de productos mínima se obtiene agrupando los 1s y determinando la expresión suma de productos mínima a partir del mapa.

Podemos agrupar los unos del mapa de Karnaugh de acuerdo con las reglas siguientes, rodeando las celdas adyacentes que contengan unos. La finalidad es maximizar el tamaño de los grupos y minimizar el numero de estos grupos.

1) Un grupo tiene que contener 1, 2, 4, 8 ó 16 celdas, valores que se corresponden con las potencias de 2. En el caso de un mapa de Karnaugh de 3 variables, el grupo máximo puede contener $2^3 = 8$ celdas.
2) Cada celda de un grupo tiene que ser adyacente a una o más celdas del mismo grupo, pero no todas las celdas del grupo tienen que ser adyacentes entre sí.
3) Incluir siempre en cada grupo el mayor número posible de 1s de acuerdo a la regla número 1.
4) Cada 1 del mapa tiene que estar incluido en al menos un grupo. Los 1s que ya pertenezcan a un grupo pueden estar incluidos en otro, siempre que los grupos que se solapen contengan 1s no comunes.

Minimización

La propiedad más importante de la minimizacion por mapas de Karnaugh es la adyacencia de las celdas ya que si en dos celdas adyacentes existen unos (que representan minitérminos de la función) se puede realizar la operación de sacar factor común entre dichas celdas y eliminar así una variable. Dos celdas son adyacentes si no difieren en más de un bit.

Por ejemplo en un diagrama de Karnaugh de cuatro variables, dos minitérminos adyacentes difieren entre sí en una sola variable. Cuatro minitérminos adyacentes difieren entre sí en dos variables, teniendo en común las dos restantes. Ocho minitérminos adyacentes difieren entre sí en tres variables, teniendo una sola variable en común.

Así como cada sumando de una función se representa por un número de minitérminos que es potencia de dos (1,2,4,8,16...) de manera inversa cada lazo posible de minitérminos adyacentes sólo puede abarcar 1,2,4,8,... minitérminos.

Se llama subcubo de orden n al lazo de 2^n minitérminos. Un lazo de un minitérmino es un lazo 2^0 y conforma un cubo de orden cero. Un lazo 2^1 es el que conforma un cubo de orden uno.

Si todas las celdas de un diagrama de Karnaugh están cubiertas por unos, entonces las función es verdadera y resulta F=1. De manera inversa, si no existe ningún minitérmino entonces la función es falsa y resulta F=0.

Implicantes

Implicante: Conjunto de unos en un mapa de Karnaugh que representa un termino producto de variables. Se denomina implicante porque cuando este termino toma el valor 1, implica que también la función toma el valor 1. Un minitérmino solo es un implicante.

Implicante primo: Implicante que no está incluido completamente dentro de otro implicante. No puede combinarse con otro implicante para eliminar un literal.

Implicante primo esencial: Implicante primo que contiene uno o mas mintérminos que no están incluidos en cualquier otro implicante primo.

Los términos I II III son implicantes primos.

El termino IV no es un implicante primo.

Los términos I III son implicantes primos esenciales

\CD AB\	00	01	11	10
00				
01		1	1	
11	1	1	1	
10	1			

I II III IV

El termino II no es un implicante primo esencial.

La función se obtiene con los términos I III

Minimización

Reglas para simplificar una función mediante el diagrama de Karnaugh

a) Representar la función en el diagrama

b) Determinar los implicantes primos para lo cual se debe:

- Enlazar cada uno de los minitérminos aislados no adyacentes a ningún otro minitérmino (subcubo de orden cero)
- Enlazar los pares de unos adyacentes entre sí (subcubos de orden uno) que no pueden formar parte de un subcubo de mayor orden.
- Continuar la búsqueda de cubos de mayor orden hasta cubrir todos los unos de la función.
- Determinar los implicantes primos esenciales.
- Los unos de la función que no han sido enlazados por dichos términos esenciales, deben cubrirse con el menor número de implicantes no esenciales

De ahora en más a cada grupo de unos se le asigna la unión (producto lógico) de las variables que se mantienen constantes (ya sea uno o cero) ignorando aquellas que cambian.

Para terminar, simplemente se realiza la suma lógica entre los términos obtenidos dando como resultado la función.

Redundancias

En un circuito de n entradas son posibles 2^n combinaciones de variables de entrada. En ciertas aplicaciones algunas de dichas combinaciones puede no existir o no tener sentido. En aplicaciones del tipo decimal es común tomar sólo 10 de las 16 combinaciones posibles con cuatro variables de entrada. En ese caso se plantea que las seis combinaciones restantes son redundantes, pudiendo ser utilizadas para la simplificación del circuito, ya que se asume que nunca se presentará dicha combinación en las entradas. En el diagrama de Karnaugh las redundancias se representan con un letra " X ".

Los términos "redundantes" pueden utilizarse para aprovechar mejor el método del mapa de Karnaugh. Para cada término redundante, se escribe una X en la celda. Cuando se agrupan los 1s, las X pueden ser consideradas también como 1s para agrandar los grupos, o como 0s si no obtenemos ninguna ventaja. Cuanto mayor sea el grupo, más sencillo será el término resultante.

Bibliografía y Licencia

- Acha, Santiago, Castro, Manuel, Rioseras, Miguel, “Electrónica Digital Introducción a la Lógica Digital” 2da Ed. (Ra-Ma 2010)
- Floyd, Thomas, “Fundamentos de sistemas digitales” 9na Ed. (Pearson 2006)
- Gonzalez Gomez, Juan,“Circuitos y Sistemas Digitales” (Madrid 2002)

- Autor:

Matías E. García

Prof. & Tec. en Informática Aplicada
www.profmatiasgarcia.com.ar
info@profmatiasgarcia.com.ar

creative commons